

幾何学基礎 小テスト (5)

曲線 (ベクトル値関数) $\mathbf{p}(t)$ に対して, $s(t)$ を 0 から t におけるその曲線の長さとする。

$\mathbf{p}(t) = (3t, -4 \cos t, 4 \sin t)$ とする。このとき, (t における) 接線ベクトル $\frac{d}{dt} \mathbf{p}(t)$ に関して,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}(t) = (3, 4 \sin t, 4 \cos t), \quad \left\| \frac{d}{dt} \mathbf{p}(t) \right\| = \sqrt{(3)^2 + (4 \sin t)^2 + (4 \cos t)^2} = 5$$

であり, $\frac{d}{ds} \mathbf{p}(t)$ は, $ds = \left\| \frac{d}{dt} \mathbf{p}(t) \right\| dt$ を通して,

$$\frac{d}{ds} \mathbf{p}(t) = \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \mathbf{p}(t) = \frac{1}{5} (3, 4 \sin t, 4 \cos t) = \mathbf{t}(t)$$

となる。このとき, (t における) 主法線ベクトル $\frac{d}{ds} \mathbf{t}(t)$ は,

$$\frac{d}{ds} \mathbf{t}(t) = \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \mathbf{t}(t) = \frac{1}{5} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{5} (3, 4 \sin t, 4 \cos t) \right\} = \frac{1}{25} (0, 4 \cos t, -4 \sin t)$$

となる。このとき, 次の問いに答えなさい。

(1) $\mathbf{p}(t)$ の (t における) 単位主法線ベクトル $\mathbf{n}(t)$ を求めなさい。

(2) $\mathbf{p}(t)$ の (t における) 従法線ベクトル $\mathbf{b}(t)$ を求めなさい。

(3) (t における) $\frac{d}{ds} \mathbf{b}(t)$ を求めなさい。

(4) $\mathbf{p}(t)$ は, (t において) 「右ねじれ」か「左ねじれ」か答えなさい。

(5) $\mathbf{p}(t)$ の (t における) 捩率 $\tau(t)$ を求めなさい。