

幾何学基礎 小テスト (4) (修正版)

曲線 (ベクトル値関数) $\mathbf{p}(t)$ に対して, $s(t)$ を 0 から t におけるその曲線の長さとする。 $\mathbf{p}(t) = (\sin t, \sqrt{3} t, \cos t)$ とする。このとき, $(t$ における) 接線ベクトル $\frac{d}{dt} \mathbf{p}(t)$ に関して,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}(t) = (\cos t, \sqrt{3}, -\sin t), \quad \left\| \frac{d}{dt} \mathbf{p}(t) \right\| = \sqrt{(\cos t)^2 + (\sqrt{3})^2 + (-\sin t)^2} = 2$$

であり, $\frac{d}{ds} \mathbf{p}(t)$ は, $ds = \left\| \frac{d}{dt} \mathbf{p}(t) \right\| dt$ を通して,

$$\frac{d}{ds} \mathbf{p}(t) = \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \mathbf{p}(t) = \frac{1}{2} (\cos t, \sqrt{3}, -\sin t) = \mathbf{t}(t)$$

となる。このとき, $(t$ における) 主法線ベクトル $\frac{d}{ds} \mathbf{t}(t)$ は,

$$\frac{d}{ds} \mathbf{t}(t) = \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \mathbf{t}(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} (\cos t, \sqrt{3}, -\sin t) \right\} = \frac{1}{4} (-\sin t, 0, -\cos t)$$

となる。このとき, 次の問いに答えなさい。

(1) $\mathbf{p}(t)$ の $(t$ における) 単位主法線ベクトル $\mathbf{n}(t)$ を求めなさい。

(2) $\mathbf{p}(t)$ の $(t$ における) 従法線ベクトル $\mathbf{b}(t)$ を求めなさい。

(3) $(t$ における) $\frac{d}{ds} \mathbf{b}(t)$ を求めなさい。

(4) $\mathbf{p}(t)$ は, $(t$ において) 「右ねじれ」か「左ねじれ」か答えなさい。

(5) $\mathbf{p}(t)$ の $(t$ における) 捩率 $\tau(t)$ を求めなさい。