

幾何学基礎 期末テスト (裏面にも問題があります。)

1. ベクトル値関数  $p(t)$  として表されるある曲線に対して,  $s(t)$  を 0 から  $t$  におけるその曲線の長さ ( $s(t) = \int_0^t \left\| \frac{d}{du} p(u) \right\| du$ ) とし,  $t(t)$  を  $p(t)$  の単位接線ベクトル,  $n(t)$  を  $p(t)$  の単位主法線ベクトル,  $b(t)$  を  $p(t)$  の従法線ベクトルとする。次の (1) ~ (15) を正しいものと誤っているものに分けなさい (解答は番号で答えなさい)。ただし,  $\frac{dp(t)}{ds}, \frac{dn(t)}{ds}, \frac{db(t)}{ds}$  はいずれも零ベクトルではない。(15点)

- (1)  $t(t) \cdot n(t) = 0,$  (2)  $t(t) \times \frac{d}{ds} t(t) = b(t),$  (3)  $n(t) \times b(t) = \mathbf{0},$   
(4)  $n(t) \times t(t) = b(t),$  (5)  $n(t) \times b(t) = \mathbf{0},$  (6)  $n(t) \times n(t) = \mathbf{0},$   
(7)  $n(t) \cdot \frac{d}{ds} b(t) = 0,$  (8)  $n(t) \times \frac{d}{ds} b(t) = \mathbf{0},$  (9)  $\frac{d}{ds} t(t) \times \frac{d}{ds} b(t) = \mathbf{0},$   
(10)  $\|b(t) \times b(t)\| = 1,$  (11)  $\|t(t) \times n(t)\| = \|t(t) \times b(t)\|,$  (12)  $\|b(t) \times n(t)\| = 1,$   
(13)  $\frac{d}{ds} t(t) \cdot \frac{d}{ds} b(t) = 0,$  (14)  $(t(t) \times \frac{d}{ds} t(t)) \cdot b(t) = 0,$  (15)  $t(t) \times \frac{d}{ds} b(t) = \mathbf{0}.$

正しいもの : \_\_\_\_\_

誤っているもの : \_\_\_\_\_

2. ベクトル値関数  $p(t) = (\cos t + \sin t, \sqrt{2} t, \cos t - \sin t)$  の,  $t$  における (1) 単位接線ベクトル  $t(t)$ , (2) 曲率  $\kappa(t)$ , (3) 単位主法線ベクトル  $n(t)$  を求めなさい。(2点+2点+2点 = 6点)

3. ベクトル値関数  $p(t) = (e^{2t}, \frac{1}{2}e^{2t}, e^{2t})$  によって表される曲線がある。このとき、以下の問いに答えなさい。(3点+3点+3点 = 9点)

- (1)  $0 \leq t \leq 1$  における曲線の長さを求めなさい。
- (2)  $t$  における  $p(t)$  の単位接線ベクトル  $t(t)$  を求めなさい。
- (3)  $t$  における  $p(t)$  の曲率  $\kappa(t)$  を求めなさい。

4. 空間上に次の3点  $A(1, 2, -2)$ ,  $B(3, -2, 1)$ ,  $C(5, 1, -4)$  がある。このとき, 以下の問いに答えなさい。((2点+2点)+2点+2点 = 8点)

(1) ベクトル  $\overrightarrow{AB}$  のノルムと方向余弦を求めなさい。

(2) 三角形 ABC を含む平面に垂直な方向を持ち, ノルムが三角形 ABC の面積に等しいベクトルをすべて求めなさい。

(3) 三角形 ABC を含む平面の方程式を求めなさい。

5. ベクトル値関数  $p(t) = (-3t, -4 \cos t, 4 \sin t)$  に対して,  $s(t)$  を 0 から  $t$  におけるその曲線の長さとする。また,  $t$  における, 接線ベクトル  $\frac{d}{dt} p(t) = (-3, 4 \sin t, 4 \cos t)$ , 主法線ベクトル  $\frac{d}{ds} t(t) = \frac{1}{25} (0, 4 \cos t, -4 \sin t)$  が導出されている。このとき,  $t$  における (おいて), (1) 曲率中心, (2) 従法線ベクトル  $b(t)$ , (3) 捩率  $\tau(t)$ , (4) “『右捩れ』か『左捩れ』か” を答えなさい。また,  $t$  における (5) 原点  $(0, 0, 0)$  を通る「単位接線ベクトルと主法線ベクトルによって張られる平面」の方程式を求めなさい。(3点+3点+3点+1点+2点 = 12点)

**計算用紙** (持ち帰って下さい。解答をメモしておくで自己採点が出来ます。)