解答例

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

幾何学基礎　小テスト (5)

曲線 (ベクトル値関数) $\boldsymbol{p}(t)$ に対して，$s(t)$ を 0 から t におけるその曲線の長さとする。$\boldsymbol{p}(t) = (3t,\ -4\cos t,\ 4\sin t)$ とする。このとき，(t における) 接線ベクトル $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{p}(t)$ に関して，

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}(t) = (3,\ 4\sin t,\ 4\cos t),\quad \left\|\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}(t)\right\| = \sqrt{(3)^2 + (4\sin t)^2 + (4\cos t)^2} = 5$$

であり，$\dfrac{d}{ds}\boldsymbol{p}(t)$ は，$ds = \|\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}(t)\|\,dt$ を通して，

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{p}(t) = \frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}(t) = \frac{1}{5}(3,\ 4\sin t,\ 4\cos t) = \boldsymbol{t}(t)$$

となる。このとき，(t における) 主法線ベクトル $\dfrac{d}{ds}\boldsymbol{t}(t)$ は，

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{t}(t) = \frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}\boldsymbol{t}(t) = \frac{1}{5}\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{5}(3,\ 4\sin t,\ 4\cos t)\right\} = \frac{1}{25}(0,\ 4\cos t,\ -4\sin t)$$

となる。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) $\boldsymbol{p}(t)$ の (t における) 単位主法線ベクトル $\boldsymbol{n}(t)$ を求めなさい。

$$\boldsymbol{n}(t) = \frac{\frac{d}{ds}\boldsymbol{t}(t)}{\|\frac{d}{ds}\boldsymbol{t}(t)\|} = \frac{\frac{1}{25}(0, 4\cos t, -4\sin t)}{\left|\frac{1}{25}\sqrt{0^2+(4\cos t)^2+(-4\sin t)^2}\right|} = (0, \cos t, -\sin t)$$

(2) $\boldsymbol{p}(t)$ の (t における) 従法線ベクトル $\boldsymbol{b}(t)$ を求めなさい。

$$\boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{t}(t) \times \boldsymbol{n}(t)$$
$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\sin t & \frac{4}{5}\cos t \\ 0 & \cos t & -\sin t \end{vmatrix} = \left(\frac{4}{5}\sin t\cdot(-\sin t) - \frac{4}{5}\cos t\cdot\cos t\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{4}{5}\cos t\cdot 0 - \frac{3}{5}\cdot(-\sin t)\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{3}{5}\cdot\cos t - \frac{4}{5}\sin t\cdot 0\right)\boldsymbol{k}$$
$$= \left(-\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\sin t,\ \frac{3}{5}\cos t\right)$$

(3) (t における) $\dfrac{d}{ds}\boldsymbol{b}(t)$ を求めなさい。

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{b}(t) = \frac{dt}{ds}\cdot\frac{d}{dt}\boldsymbol{b}(t) = \frac{1}{5}\cdot\frac{d}{dt}\left(-\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\sin t,\ \frac{3}{5}\cos t\right)$$
$$= \frac{1}{25}(0,\ 3\cos t,\ -3\sin t) = \frac{3}{25}(0,\ \cos t,\ -\sin t)$$

(4) $\boldsymbol{p}(t)$ は，(t において)「右ねじれ」か「左ねじれ」か答えなさい。

$\frac{d}{ds}\boldsymbol{b}(t)$ が $\boldsymbol{t}(t)$ の正の定数倍，つまり，同方向なので

「左ねじれ」//

(5) $\boldsymbol{p}(t)$ の (t における) 捩率 $\tau(t)$ を求めなさい。

$$\left\|\frac{d}{ds}\boldsymbol{b}(t)\right\| = \left|\frac{3}{25}\sqrt{0^2+(\cos t)^2+(-\sin t)^2}\right| = \frac{3}{25}$$

「左ねじれ」なので符号は負

$$\Rightarrow \tau(t) = -\frac{3}{25}\ //$$

(or
$\frac{d}{ds}\boldsymbol{b}(t) = -\tau\boldsymbol{n}$
$\Rightarrow \frac{3}{25}(0, \cos t, -\sin t)$
$= -\tau(0, \cos t, -\sin t)$
$\Rightarrow \tau = -\frac{3}{25}$)