解答例

学籍番号 ______________________　　氏名 ______________________

幾何学基礎　小テスト (4) (修正版)

曲線 (ベクトル値関数) $\boldsymbol{p}(t)$ に対して，$s(t)$ を 0 から t におけるその曲線の長さとする。$\boldsymbol{p}(t) = (\sin t,\ \sqrt{3}\,t,\ \cos t)$ とする。このとき，(t における) 接線ベクトル $\dfrac{d}{dt}\,\boldsymbol{p}(t)$ に関して，

$$\frac{d}{dt}\,\boldsymbol{p}(t) = (\cos t,\ \sqrt{3},\ -\sin t),\quad \|\frac{d}{dt}\,\boldsymbol{p}(t)\| = \sqrt{(\cos t)^2 + (\sqrt{3})^2 + (-\sin t)^2} = 2$$

であり，$\dfrac{d}{ds}\,\boldsymbol{p}(t)$ は，$ds = \|\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}(t)\|\,dt$ を通して，

$$\frac{d}{ds}\,\boldsymbol{p}(t) = \frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}\,\boldsymbol{p}(t) = \frac{1}{2}(\cos t,\ \sqrt{3},\ -\sin t) = \boldsymbol{t}(t)$$

となる。このとき，(t における) 主法線ベクトル $\dfrac{d}{ds}\boldsymbol{t}(t)$ は，

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{t}(t) = \frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}\,\boldsymbol{t}(t) = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\{\frac{1}{2}(\cos t,\ \sqrt{3},\ -\sin t)\} = \frac{1}{4}(-\sin t, 0, -\cos t)$$

となる。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) $\boldsymbol{p}(t)$ の (t における) 単位主法線ベクトル $\boldsymbol{n}(t)$ を求めなさい。

$$\boldsymbol{n}(t) = \frac{\frac{d}{ds}\boldsymbol{t}(t)}{\|\frac{d}{ds}\boldsymbol{t}(t)\|} = \frac{\frac{1}{4}(-\sin t, 0, -\cos t)}{|\frac{1}{4}|\,\|(-\sin t, 0, -\cos t)\|} = (-\sin t, 0, -\cos t) = \underline{-(\sin t, 0, \cos t)}$$

(2) $\boldsymbol{p}(t)$ の (t における) 従法線ベクトル $\boldsymbol{b}(t)$ を求めなさい。

$$\boldsymbol{b}(t) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{1}{2}\cos t, & \frac{\sqrt{3}}{2}, & -\frac{1}{2}\sin t \\ -\sin t & 0 & -\cos t \end{vmatrix} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\right)$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t - 0\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{1}{2}\sin^2 t + \frac{1}{2}\cos^2 t\right)\boldsymbol{j} + \left(0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\right)\boldsymbol{k}$$

(3) (t における) $\dfrac{d}{ds}\boldsymbol{b}(t)$ を求めなさい。

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{b}(t) = \frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}\boldsymbol{b}(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\right) = \underline{\frac{\sqrt{3}}{4}(\sin t, 0, \cos t)}$$

(4) $\boldsymbol{p}(t)$ は，(t において)「右ねじれ」か「左ねじれ」か答えなさい。

$\frac{d}{ds}\boldsymbol{b}(t)$ は $\boldsymbol{n}$ と逆方向なので右ねじれ.

(5) $\boldsymbol{p}(t)$ の (t における) 捩率 $\tau(t)$ を求めなさい。

$\|\frac{d}{ds}\boldsymbol{b}(t)\| = \frac{\sqrt{3}}{4}$

また 右ねじれなので "+"　$\Rightarrow \tau = \frac{\sqrt{3}}{4}$

(or

$\frac{d}{ds}\boldsymbol{b}(t) = -\tau\cdot\boldsymbol{n}(t)$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}(\sin t, 0, \cos t) = -\tau(-\sin t, 0, \cos t)$

$\Rightarrow \tau = \frac{\sqrt{3}}{4}$)