

幾何学基礎 小テスト (3)

ベクトル値関数 $p(t)$ として表される曲線に対して, $s(t)$ を 0 から t におけるその曲線の長さ (つまり, $p(t)$ に沿って移動した距離) とする。 $p(t) = (\sin 2t, 2\sqrt{3}t, \cos 2t)$ とするとき, 次の問いに答えなさい。

- (1) $p(t)$ の接線ベクトル $\frac{d}{dt} p(t)$ を求めなさい。

$$\frac{d}{dt} p(t) = \frac{d}{dt} (\sin 2t, 2\sqrt{3}t, \cos 2t) = (2\cos 2t, 2\sqrt{3}, -2\sin 2t)$$

- (2) $\frac{dt}{ds}$ を求めなさい。

$$\begin{aligned} ds &= \left\| \frac{d}{dt} p(t) \right\| dt \Rightarrow ds = \sqrt{(2\cos 2t)^2 + (2\sqrt{3})^2 + (-2\sin 2t)^2} dt \\ &= 4 dt \\ \Rightarrow \frac{dt}{ds} &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- (3) $\frac{d}{ds} p(t)$ を求めなさい。

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} p(t) &= \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d}{dt} p(t) = \frac{1}{4} (2\cos 2t, 2\sqrt{3}, -2\sin 2t) \\ &= \frac{1}{2} (\cos 2t, \sqrt{3}, -\sin 2t) \end{aligned}$$

- (4) $p(t)$ の (t における) 曲率 $\kappa(t)$ を求めなさい。

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{d}{ds} p(t) \right) &= \frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{2} (\cos 2t, \sqrt{3}, -\sin 2t) \right\} \\ &= \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} (\cos 2t, \sqrt{3}, -\sin 2t) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2\sin 2t, 0, -2\cos 2t) \\ &= -\frac{1}{4} (\sin 2t, 0, \cos 2t) \end{aligned}$$

$$\kappa(t) = \left\| \frac{d}{ds} \left(\frac{d}{ds} p(t) \right) \right\| = \left| -\frac{1}{4} \sqrt{(\sin 2t)^2 + 0^2 + (\cos 2t)^2} \right| = \frac{1}{4}$$

- (5) $p(t)$ の (t における) 曲率半径 $\rho(t)$ を求めなさい。

$$\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)} = 4$$