

幾何学基礎 小テスト (2)

ベクトル値関数 $p(t)$ として表される曲線に対して, $s(t)$ を 0 から t におけるその曲線の長さ (つまり, $p(t)$ に沿って移動した距離) とする。 $p(t) = (\sin t, \sqrt{3}t, \cos t)$ とするとき, 次の問いに答えなさい。

(1) $p(t)$ の接線ベクトル $\frac{d}{dt} p(t)$ を求めなさい。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} p(t) &= \frac{d}{dt} (\sin t, \sqrt{3}t, \cos t) \\ &= (\cos t, \sqrt{3}, -\sin t)\end{aligned}$$

(2) $p(t)$ の単位接線ベクトルを求めなさい。

$$\frac{\frac{d}{dt} p(t)}{\|\frac{d}{dt} p(t)\|} = \frac{(\cos t, \sqrt{3}, -\sin t)}{\sqrt{(\cos t)^2 + (\sqrt{3})^2 + (-\sin t)^2}} = \frac{1}{2} (\cos t, \sqrt{3}, -\sin t)$$

(3) $1 \leq t \leq 2$ における曲線 $p(t)$ の軌跡の長さを求めなさい。

$$s = \int_1^2 \|\frac{d}{dt} p(t)\| dt = \int_1^2 2 dt = 2.$$

(4) $\frac{d}{ds} p(t)$ を求めなさい。

$$ds = \|\frac{d}{dt} p(t)\| dt \Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\frac{d}{dt} p(t)\|} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} p(t) &= \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d}{dt} p(t) = \frac{1}{\|\frac{d}{dt} p(t)\|} \frac{d}{dt} p(t) \\ &= \frac{1}{2} (\cos t, \sqrt{3}, -\sin t)\end{aligned}$$

(5) $q(t) = (\sin(2t), 2\sqrt{3}t, \cos(2t))$ とするとき, $\frac{d}{ds} q(t)$ を求めなさい。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} q(t) &= (2\cos(2t), 2\sqrt{3}, -2\sin(2t)) = 2(\cos(2t), \sqrt{3}, -\sin(2t)) \\ \|\frac{d}{dt} q(t)\| &= \sqrt{(2\cos(2t))^2 + (2\sqrt{3})^2 + (-2\sin(2t))^2} = 4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} q(t) &= \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d}{dt} q(t) = \frac{1}{4} \cdot 2(\cos(2t), \sqrt{3}, -\sin(2t)) \\ &= \frac{1}{2} (\cos(2t), \sqrt{3}, -\sin(2t))\end{aligned}$$