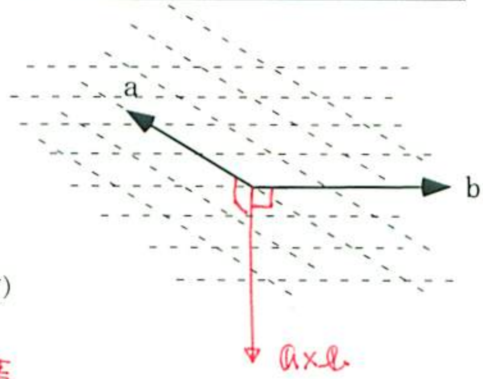
〈解答例〉

幾何学基礎小テスト（1）　　学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿



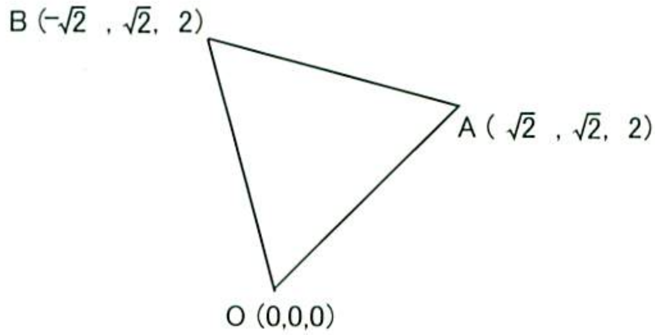
1）右図のベクトル a, b の外積 a×b を方向がわかるように図示せよ。ただし，ベクトルの長さは便宜上、自由に決めて良い。

2）ベクトル a, b の外積 a×b の長さと方向に関する特徴(性質)をあげよ(方向に関しては、正負は気にしない）。

長さ：a, b を隣接する2辺にもつ平行四辺形の面積

方向：a, b ともに直交する方向

右図の三角形ＡＢＯについて以下の問いに答えよ。



3）ベクトルＯＡのノルムと方向余弦を求めよ。

$\overrightarrow{OA} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$

$\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2+2^2} = 2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{OA}$ の方向余弦は

$\dfrac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|} = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

4）ＯＡとＯＢのなす角の大きさを求めよ。

$\|\overrightarrow{OA}\| = 2\sqrt{2},\quad \|\overrightarrow{OB}\| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2+2^2} = 2\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = (\sqrt{2},\sqrt{2},2)\cdot(-\sqrt{2},\sqrt{2},2) = \sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2})+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+2\cdot 2 = 4 \\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\|\cdot\|\overrightarrow{OB}\|\cos\theta = 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cos\theta = 8\cos\theta\end{array}\right\} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3}$

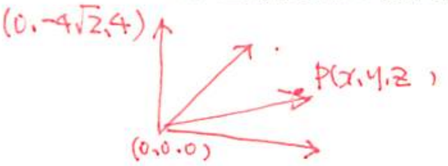
5）三角形ＡＢＯの面積を求めよ。

$\triangle ABO = \dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\|$

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \end{vmatrix} = (2\sqrt{2}-2\sqrt{2})\mathbb{i} + (-2\sqrt{2}-2\sqrt{2})\mathbb{j} + (\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2}))\mathbb{k} = (0, -4\sqrt{2}, 4)$$

$\Rightarrow \triangle ABO = \dfrac{1}{2}\sqrt{0^2+(-4\sqrt{2})^2+4^2} = 2\sqrt{3}$.

6）三角形ＡＢＯを含む平面の方程式求めよ（ただし、ax+by+cz+d=0の形で答えよ）。



$(x, y, z)\cdot(0, -4\sqrt{2}, 4) = 0$

$\Rightarrow -4\sqrt{2}y + 4z = 0$　$(-\sqrt{2}y + z = 0)$

7）線分ＡＢ，ＢＯの両方に対して直交する単位ベクトルをすべて求めよ。

$\pm\dfrac{\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\|} = \pm\dfrac{(0, -4\sqrt{2}, 4)}{4\sqrt{3}} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}(0, -\sqrt{2}, 1)$

$\left(\pm\left(0, -\dfrac{\sqrt{6}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$.