幾何学基礎　期末テスト (裏面にも問題があります。)　　解答例

1. ベクトル値関数 $\boldsymbol{p}(t)$ として表されるある曲線に対して，$s(t)$ を 0 から t におけるその曲線の長さ ($s(t) = \int_0^t \|\frac{d}{du}\boldsymbol{p}(u)\|\, du$) とし，$\boldsymbol{t}(t)$ を $\boldsymbol{p}(t)$ の単位接線ベクトル，$\boldsymbol{n}(t)$ を $\boldsymbol{p}(t)$ の単位主法線ベクトル，$\boldsymbol{b}(t)$ を $\boldsymbol{p}(t)$ の従法線ベクトルとする。次の (1)〜(15) を正しいものと誤っているものに分けなさい (解答は番号で答えなさい)。ただし，$\frac{d\boldsymbol{p}(t)}{ds}$, $\frac{d\boldsymbol{n}(t)}{ds}$, $\frac{d\boldsymbol{b}(t)}{ds}$ はいずれも零ベクトルではない。(15 点)

(1) $\boldsymbol{t}(t)\cdot\boldsymbol{n}(t) = 0$,
(2) $\boldsymbol{t}(t)\times\frac{d}{ds}\boldsymbol{t}(t) = \boldsymbol{b}(t)$,　$\neq /\!/\,\boldsymbol{n}(t)$
(3) $\boldsymbol{n}(t)\times\boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{0}$,
(4) $\boldsymbol{n}(t)\times\boldsymbol{t}(t) = \boldsymbol{b}(t)$,
(5) $\boldsymbol{n}(t)\times\boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{0}$,
(6) $\boldsymbol{n}(t)\times\boldsymbol{n}(t) = \boldsymbol{0}$,
(7) $\boldsymbol{n}(t)\cdot\frac{d}{ds}\boldsymbol{b}(t) = 0$,　$/\!/\,\boldsymbol{n}(t)$
(8) $\boldsymbol{n}(t)\times\frac{d}{ds}\boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{0}$,
(9) $\frac{d}{ds}\boldsymbol{t}(t)\times\frac{d}{ds}\boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{0}$,
(10) $\|\boldsymbol{b}(t)\times\boldsymbol{b}(t)\| = 1$,
(11) $\|\boldsymbol{t}(t)\times\boldsymbol{n}(t)\| = \|\boldsymbol{t}(t)\times\boldsymbol{b}(t)\|$,
(12) $\|\boldsymbol{b}(t)\times\boldsymbol{n}(t)\| = 1$,
(13) $\frac{d}{ds}\boldsymbol{t}(t)\cdot\frac{d}{ds}\boldsymbol{b}(t) = 0$,
(14) $(\boldsymbol{t}(t)\times\frac{d}{ds}\boldsymbol{t}(t))\cdot\boldsymbol{b}(t) = 0$,
(15) $\boldsymbol{t}(t)\times\frac{d}{ds}\boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{0}$.

正しいもの:　(1) ~~(2)~~ (6) (8) (9) (11) (12)

誤っているもの:　(3) (4) (5) (7) (10) (13) (14) (15)　(2)

2. ベクトル値関数 $\boldsymbol{p}(t) = (\cos t + \sin t,\ \sqrt{2}\,t,\ \cos t - \sin t)$ の，t における (1) 単位接線ベクトル $\boldsymbol{t}(t)$, (2) 曲率 $\kappa(t)$, (3) 単位主法線ベクトル $\boldsymbol{n}(t)$ を求めなさい。(2 点+2 点+2 点 = 6 点)

$$\frac{d}{dt}\mathbb{p}(t) = (-\sin t + \cos t,\ \sqrt{2},\ -\sin t - \cos t)$$

$$\left\|\frac{d}{dt}\mathbb{p}(t)\right\| = \sqrt{(-\sin t + \cos t)^2 + (\sqrt{2})^2 + (-\sin t - \cos t)^2} = 2$$

$$ds = \left\|\frac{d}{dt}\mathbb{p}(t)\right\| dt \Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{2}$$

(1) $$\mathbb{t}(t) = \frac{\frac{d}{dt}\mathbb{p}(t)}{\left\|\frac{d}{dt}\mathbb{p}(t)\right\|} = \frac{1}{2}(-\sin t + \cos t,\ \sqrt{2},\ -\sin t - \cos t)$$

(2) $$\frac{d}{ds}\mathbb{t}(t) = \frac{dt}{ds}\cdot\frac{d}{dt}\mathbb{t}(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}(-\sin t + \cos t,\ \sqrt{2},\ -\sin t - \cos t)\right\}$$
$$= \frac{1}{4}(-\cos t - \sin t,\ 0,\ -\cos t + \sin t)$$

$$\kappa(t) = \left\|\frac{d}{ds}\mathbb{t}(t)\right\| = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

(3) $$\mathbb{n}(t) = \frac{\frac{d}{ds}\mathbb{t}(t)}{\left\|\frac{d}{ds}\mathbb{t}(t)\right\|} = \frac{\frac{1}{4}(-\cos t - \sin t,\ 0,\ -\cos t + \sin t)}{\frac{\sqrt{2}}{4}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t - \sin t,\ 0,\ -\cos t + \sin t)$$

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

3. ベクトル値関数 $\boldsymbol{p}(t) = (e^{2t},\ \frac{1}{2}e^{2t},\ e^{2t})$ によって表される曲線がある。このとき，以下の問いに答えなさい。(3 点+3 点+3 点 = 9 点)

(1) $0 \leq t \leq 1$ における曲線の長さを求めなさい。

(2) t における $\boldsymbol{p}(t)$ の単位接線ベクトル $\boldsymbol{t}(t)$ を求めなさい。

(3) t における $\boldsymbol{p}(t)$ の曲率 $\kappa(t)$ を求めなさい。

$$\frac{d}{dt}\mathbb{P}(t) = (2e^{2t}, e^{2t}, 2e^{2t}) \Rightarrow \left\|\frac{d}{dt}\mathbb{P}(t)\right\| = 3e^{2t}$$

(1) $\displaystyle\int_0^1 ds = \int_0^1 \left\|\frac{d}{dt}\mathbb{P}(t)\right\| dt = \int_0^1 3e^{2t} dt = \frac{3}{2}(e^2 - 1)$

(2) $\displaystyle\mathbb{t}(t) = \frac{\frac{d}{dt}\mathbb{P}(t)}{\left\|\frac{d}{dt}\mathbb{P}(t)\right\|} = \frac{1}{3}(2, 1, 2)$

(3) $\displaystyle\frac{d}{ds}\mathbb{t}(t) = \frac{dt}{ds}\cdot\frac{d}{dt}\mathbb{t}(t) = (0, 0, 0)$

$\displaystyle\kappa(t) = \left\|\frac{d}{ds}\mathbb{t}(t)\right\| = 0.$

4. 空間上に次の3 点 A(1, 2, −2), B(3, −2, 1), C(5, 1, −4) がある。このとき，以下の問いに答えなさい。((2 点+2 点)+2 点+2 点 = 8 点)

(1) ベクトル $\overrightarrow{AB}$ のノルムと方向余弦を求めなさい。

(2) 三角形 ABC を含む平面に垂直な方向を持ち，ノルムが三角形 ABC の面積に等しいベクトルをすべて求めなさい。

(3) 三角形 ABC を含む平面の方程式を求めなさい。

$$\overrightarrow{AB} = B(3,-2,1) - A(1,2,-2) = (2,-4,3)$$
$$\overrightarrow{AC} = C(5,1,-4) - A(1,2,-2) = (4,-1,-2)$$

(1) $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2+(-4)^2+3^2} = \sqrt{29}$

$\overrightarrow{AB}$ の方向余弦 $= \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{29}}(2,-4,3)$

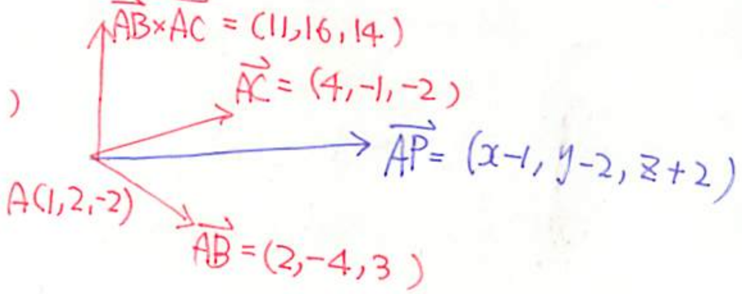
(2) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ 2 & -4 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (8+3)\mathbb{i} + (12+4)\mathbb{j} + (-2+16)\mathbb{k}$

$= (11, 16, 14)$

よって求めるベクトルは

$$\pm\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}) = \pm\frac{1}{2}(11,16,14)$$

(3)



$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}) \perp \overrightarrow{AP} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AP} = 0$$

$$\Rightarrow (11,16,14)\cdot(x-1, y-2, z+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 11(x-1) + 16(y-2) + 14(z+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 11x + 16y + 14z - 15 = 0$$

5. ベクトル値関数 $\boldsymbol{p}(t) = (-3t,\ -4\cos t,\ 4\sin t)$ に対して，$s(t)$ を 0 から t におけるその曲線の長さとする。また，t における，接線ベクトル $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{p}(t) = (-3,\ 4\sin t,\ 4\cos t)$，主法線ベクトル $\dfrac{d}{ds}\boldsymbol{t}(t) = \dfrac{1}{25}(0,\ 4\cos t,\ -4\sin t)$ が導出されている。このとき，t における (おいて)，(1) 曲率中心，(2) 従法線ベクトル $\boldsymbol{b}(t)$，(3) 捩率 $\tau(t)$，(4) "『右捩れ』か『左捩れ』か" を答えなさい。また，t における (5) 原点 $(0,0,0)$ を通る「単位接線ベクトルと主法線ベクトルによって張られる平面」の方程式を求めなさい。(3 点+3 点+3 点+1 点+2 点 = 12 点)

$$\left\|\frac{d}{dt}\mathbb{p}(t)\right\| = \sqrt{(-3)^2+(4\sin t)^2+(4\cos t)^2} = 5 \Rightarrow ds = \left\|\frac{d}{dt}\mathbb{p}(t)\right\| dt \Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{5}$$

$$\left\|\frac{d}{ds}\mathbb{t}(t)\right\| = \frac{1}{25}\sqrt{(0)^2+(4\cos t)^2+(-4\sin t)^2} = \frac{4}{25} = \frac{1}{\rho(t)}$$

$$\Rightarrow \rho(t) = \frac{25}{4}$$

$$\mathbb{n}(t) = \frac{\frac{d}{ds}\mathbb{t}(t)}{\left\|\frac{d}{ds}\mathbb{t}(t)\right\|} = \frac{\frac{1}{25}(0,\ 4\cos t,\ -4\sin t)}{\frac{4}{25}} = (0,\ \cos t,\ -\sin t)$$

(1) 曲率中心 $= \mathbb{p}(t) + \rho(t)\cdot\mathbb{n}(t)$

$$= (-3t,\ -4\cos t,\ 4\sin t) + \frac{25}{4}(0,\ \cos t,\ -\sin t)$$

$$= \left(-3t,\ \frac{9}{4}\cos t\ -\frac{9}{4}\sin t\right)$$

(2) $$\mathbb{b}(t) = \mathbb{t}(t)\times\mathbb{n}(t) = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\sin t & \frac{4}{5}\cos t \\ 0 & \cos t & -\sin t \end{vmatrix} = \left(-\frac{4}{5}\sin^2 t - \frac{4}{5}\cos^2 t\right)\mathbb{i} + \left(0 - \frac{3}{5}\sin t\right)\mathbb{j} + \left(-\frac{3}{5}\cos t - 0\right)\mathbb{k}$$

$$= \left(-\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\sin t,\ -\frac{3}{5}\cos t\right)$$

(3) $$\frac{d}{ds}\mathbb{b}(t) = \frac{dt}{ds}\cdot\frac{d}{dt}\mathbb{b}(t) = \frac{1}{5}\cdot\left(0,\ -\frac{3}{5}\cos t,\ \frac{3}{5}\sin t\right)$$

$$= -\frac{3}{25}\underbrace{(0,\ \cos t,\ -\sin t)}_{=\mathbb{n}(t)}$$

$$\frac{d}{ds}\mathbb{b}(t) = -\tau\,\mathbb{n}(t)$$

$$\Rightarrow -\tau = -\frac{3}{25} \Rightarrow \tau = \frac{3}{25}$$

(4) $\tau = \dfrac{3}{25} > 0 \Rightarrow$ 右捩れ

(5) $(\mathbb{t}(t)\times\mathbb{n}(t))\cdot(x-0,\ y-0,\ z-0) = 0$ (see. question 4).

$$\Rightarrow \mathbb{b}(t)\cdot(x,y,z) = 0$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\sin t,\ -\frac{3}{5}\cos t\right)(x,y,z) = 0$$

$$\Rightarrow 4x + (3\sin t)y + (3\cos t)z = 0$$